

Aristide Tsemo,
 Department of Mathematics and Computer Science,
 Ryerson University 350, Victoria Street
 Toronto, ON
 M5B 2K3
 Canada taristid@scs.ryerson.ca

Géométrie affine, géométrie symplectique.

Abstract.

In this paper we study the relation between affine manifolds and symplectic geometry, Liberman and Weinstein have shown that a leaf of a lagrangian foliation is endowed with an affine structure, we translate properties, and conjectures of affine manifolds in symplectic geometry. This allows to show the Auslander to be true if the linear holonomy is contained in $Gl(n, \mathbb{Z})$.

Une variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$, est une variété différentiable M , munie d'une 2-forme fermée ω , telle que $\Lambda^n \omega$ soit une forme volume de M . Un feuilletage \mathcal{F} de dimension n , de M est lagrangien si et seulement si les feuilles de \mathcal{L} sont isotropes pour ω , ce qui est équivalent à dire que la restriction de la forme symplectique sur chacune des feuilles est nulle.

Weinstein a montré que les feuilles d'un feuilletage lagrangien sont munies d'une structure de variétés affines, i.e d'une connexion dont les tenseurs de courbure et de torsion sont nulles. Une telle construction similaire avait été effectuée par Paulette Libermann.

Rappelons la construction de Dazord de la connection de Libermann-Weinstein: Soient L_0 une feuille de \mathcal{L} , $\chi(\mathcal{L})$ l'algèbre des champs de vecteurs tangents à \mathcal{L} , et $\chi(n(\mathcal{L}))$ l'ensemble des sections du fibré normal de \mathcal{L} .

La connexion de Bott du feuilletage \mathcal{L} est définie sur $\chi(\mathcal{L}) \otimes \chi(n(\mathcal{L}))$ par:

$$\hat{\nabla}_X Y = u([X, Y'])$$

où Y' est un élément de $\chi(M)$ au-dessus de Y , et u la projection canonique $\chi(M) \rightarrow \chi(n(\mathcal{L}))$. Cette connexion induit sur le dual $(\chi(n(\mathcal{L})))^*$ une connexion ∇' définie par la formule classique:

$$\nabla'_X f(t) = L_X(f(t)) - f(\hat{\nabla}_X t)$$

La dualité symplectique permet d'identifier $\chi(\mathcal{L})$ à $(\chi(n(\mathcal{L})))^*$ puisque \mathcal{L} est un feuilletage lagrangien. Par cette identification, la connexion ∇' induit sur chaque feuille L_0 de \mathcal{L} une connexion ∇_{L_0} dont les tenseurs de courbure et de torsion sont nuls. Ceci est équivalent à définir la structure différentielle de L_0 par un atlas dont les fonctions de transitions sont des applications affines.

Considérons un système de coordonnées de Darboux $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ adapté au feuilletage, dans ce système le feuilletage est défini par les équations $dq_1 = \dots = dq_n = 0$. Les coordonnées (p_1, \dots, p_n) définissent la structure affine de Libermann-Weinstein.

La connexion ∇_{L_0} est le dual de la connexion de Bott. On en déduit ainsi un isomorphisme entre l'holonomie de ∇_{L_0} et l'holonomie infinitésimale de \mathcal{L} en L_0 . Le but de ce papier est de transcrire les propriétés des variétés affines en utilisant le dictionnaire défini par la géométrie lagrangienne. La topologie des variétés symplectiques compactes a été étudiée par divers auteurs, Donaldson a montré l'existence de sous-variétés symplectiques en toutes codimensions, Auroux a étudié l'existence de déformations continues de ces variétés symplectiques. On se sert de ces constructions pour démontrer la conjecture d'Auslander lorsque l'holonomie linéaire est contenue dans $Gl(n, \mathbb{Z})$. Puis nous d'étendons le principe de réduction de Molino en utilisant la notion de tour de torseurs.

Conjecture d'Auslander et croissance.

Une variété affine (M, ∇_M) est complète si et seulement si la connexion ∇_M est géodésiquement complète. L. Auslander a conjecturé que le groupe fondamental d'une variété affine compacte et complète (M, ∇_M) est polycyclique. Cette conjecture a faite l'objet de nombreux travaux, et a été prouvée dans les cas suivants:

- La dimension de M est inférieure à 3 par Fried et Goldman,
- La dimension de M est inférieure à 6, par Abels, Soifer et Margulis.
- L'holonomie de la connexion ∇_M est incluse dans $O(n-1, 1)$, par Goldman et Kamishima.
- Le groupe des transformations affines de (M, ∇_M) est de cohomogénéité supérieure à 1 par Tsemo.

Definitions 2.1 Soient (M, \mathcal{L}) une variété différentiable compacte M , munie d'un feuilletage \mathcal{L} , et $(U_i)_{i \in I}$ un atlas de M tel que la restriction de \mathcal{L} à U_i est simple. Considérons L_0 une feuille de \mathcal{L} , une plaque P_i de L_0 . est une composante connexe de $L_0 \cap U_i$. Un chemin de L_0 , est une famille de plaques (P_1, \dots, P_l) telle que $P_i \cap P_{i+1}$ n'est pas vide, l est appelé la longueur du chemin.

L'application de croissance γ_{U_i} définie sur \mathbb{N} , est définie par $\gamma_{U_i}(n)$, est le nombre de plaques qui peuvent être jointes à P_i par un chemin de longueur inférieur à n . La croissance de L_0 est celle de l'application γ_{U_i} .

Supposons que M et la feuille L_0 soient compactes, et soient T une transversale locale et connexe de \mathcal{L} en L_0 , et \hat{L}_0 , le revêtement universonnel de L_0 . La méthode de suspension de Haefliger permet de représenter un voisinage de L_0 , comme quotient de $\hat{L}_0 \times T$ par l'action ρ du groupe fondamental $\pi_1(L_0)$ définie par les transformations du revêtement sur le premier facteur, et l'holonomie sur le second.

Proposition 2.1

Supposons que la feuille L_0 soit compacte, alors la croissance de toute feuille L_1 , appartenant au voisinage V de L_0 , définie au paragraphe précédent est majorée par celle de $\pi_1(L_0)$.

Preuve.

La transversale utilisée pour construire la suspension de Haefliger peut être choisie compacte. On peut alors appliquer la proposition 1.29 de [6].

Proposition 2.2.

Supposons que la croissance des feuilles de \mathcal{L} dans un voisinage de L_0 soit polynomiale, alors $\pi_1(L_0)$ est polycyclique.

Preuve.

Supposons que $\pi_1(L_0)$ ne soit pas polycyclique, alors l'alternative de Tits, implique l'existence d'un sous-groupe libre de $\pi_1(L_0)$ de rang supérieur à 2. On en déduit que l'holonomie infinitésimale de L_0 contient aussi un sous-groupe libre de rang supérieur à 2. La croissance de toute feuille du voisinage de L_0 ne peut être polynomiale. Une autre preuve de ce résultat se trouve dans l'article de Thurston et Plante.

Dans une version antérieure de ce travail, nous avons conjecturé que toute variété affine compacte et complète (N, ∇_N) est la feuille d'un feuilletage lagrangien, et les feuilles d'un voisinage de N , ont une croissance polynomiale. William Goldman nous a communiqué un contre exemple à cette conjecture que voici:

Considérons la suspension M du tore de dimension 2, T^2 munie de sa structure riemannienne plate standard au-dessus du cercle T^1 , par l'action de \mathbb{Z} définie par un élément de $Gl(2, \mathbb{Z})$ hyperbolique, c'est à dire ayant des valeurs propres distinctes en valeurs absolues de 1. Le fibré cotangent T^*M de M peut être compactifié par l'action du tore T^3 agissant fibre à fibre par des translations. La variété M est donc feuille d'un feuilletage lagrangien. La croissance de son groupe fondamental est exponentielle.

Remarque.

Il existe des variétés affine compactes dont le groupe fondamental n'est pas polycyclique. C'est le cas du produit du cercle par une surface de genre supérieur à 2.

Proposition 2.3.

Soit (L_0, ∇_{L_0}) une variété affine compacte dont l'holonomie linéaire est incluse dans $Gl(n, \mathbb{Z})$, alors L_0 est la feuille d'un feuilletage lagrangien défini sur une variété symplectique compacte.

Preuve.

Soit \hat{L}_0 le revêtement universel de L_0 , le fibré cotangent T^*L_0 de L_0 , est le quotient de $\hat{L}_0 \times \mathbb{R}^n$ par l'action de $\pi_1(L_0)$ définie par sur \hat{L}_0 par les transformations du revêtement et sur \mathbb{R}^n par:

$$h : \pi_1(L_0) \rightarrow Gl(n, \mathbb{R}),$$

$$\gamma \rightarrow^t (L(h_{L_0})(\gamma^{-1})),$$

où $L(h_{L_0})$ est l'holonomie linéaire de (L_0, ∇_{L_0}) .

Soient e_1, \dots, e_n une base de \mathbb{R}^n , et t_{e_i} la translation de direction e_i , $1 \leq i \leq n$. Le quotient de T^*L_0 par t_{e_1}, \dots, t_{e_n} fibre à fibre est une variété compacte (N, ∇_N) , suspension du tore T^n au-dessus de L_0 . La structure symplectique du cotangent T^*L_0 se projette en une structure symplectique de N .

Soit (M, ∇_M) une variété symplectique compacte munie d'un feuilletage lagrangien \mathcal{L} , dont (L_0, ∇_{L_0}) est une feuille compacte et complète. Il existe un voisinage U de L_0 symplectomorphe à la section nulle du fibré cotangent de L_0 . L'holonomie infinitésimale de \mathcal{L} et celle de ∇_{L_0} sont mis en dualité par la structure symplectique. On en déduit que la conjecture d'Auslander est vérifiée si la croissance combinatoire des feuilles du feuilletage horizontal de T^*L_0 est polynomiale.

Milnor a demandé si le groupe fondamental d'une variété affine est polycyclique. Margulis a construit un exemple de variété affine de dimension 3 dont le groupe fondamental est un groupe libre à deux générateurs. D'autres exemples de variétés affines dont le groupe fondamental est libre ont été construits par Goldman, Drumm et Charette. Ces variétés sont-elles des feuilles de feuilletages lagrangiens?

Le groupe fondamental d'une variété affine compacte non complète peut contenir un sous-groupe libre à deux générateurs. Ces variétés sont-elles des feuilles de feuilletages lagrangiens ?

Exemples de variétés affines compactes feuilles de feuilletages lagrangiens.

On définit deux feuilletages lagrangiens sur le tore de dimension 4, T^4 ayant des feuilles lagrangiennes compactes.

Le premier exemple est le tore de dimension 4, T^4 muni de sa structure euclidienne plate standard, il est le quotient de \mathbb{R}^4 par les translations t_{e_1}, \dots, t_{e_4} , où e_1, \dots, e_4 est une base de \mathbb{R}^4 . La forme symplectique est la forme $\omega_0 = dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4$. Le feuilletage lagrangien est l'image du feuilletage de \mathbb{R}^4 par espaces affines parallèles à $\text{vect}(e_1, e_2)$ par l'application revêtement.

Le second exemple est le quotient de \mathbb{R}^4 par les transformations affines

$$h_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 1, x_2, x_3, x_4)$$

$$h_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2 + 1, x_3, -x_3 + x_4)$$

$$h_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4 + 1)$$

$$h_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2, x_3 + 1, -x_3 + x_4)$$

La structure symplectique est la projection de ω_0 . Le feuilletage lagrangien est l'image du feuilletage de \mathbb{R}^4 par espaces affines parallèles à $\text{vect}(e_1, e_2)$ par

l'application revêtement. La feuille compacte est la projection de celle passant par 0.

Le quotient de \mathbb{R}^4 par les transformations affines h_1, h_2, t_3 et t_4 est une variété symplectique. Le feuilletage lagrangien est l'image du feuilletage de \mathbb{R}^4 par espaces affines parallèles à $\text{vect}(e_1, e_2)$ par l'application revêtement.

Considérons une variété symplectique M de dimension $2n, n \geq 2$. Donaldson a montré qu'il existe des sous-variétés symplectiques N_m , de codimension $2m$ dans M dont le groupe fondamental est isomorphe à celui de M , si la dimension de N_m est supérieure ou égale à 4. Le plongement naturel de $N_1 \rightarrow M$ induit un épimorphisme de groupes fondamentaux. Les variétés N_m peuvent être choisies disjointes de toutes sous-variétés lagrangienne N , en contenant tout point contenu dans $M - N$. Auroux a démontré que leur classe d'isomorphisme est un invariant de la structure symplectique. On en déduit:

Proposition 2.4.

Soit (M, ∇_M) une variété affine compacte et complète dont l'holonomie linéaire est contenue dans $Gl(n, \mathbb{Z})$, alors le compactifié du fibré cotangent (N, ∇_N) définie à la proposition précédente à une sous-variété symplectique de dimension 4 dont le groupe fondamental est isomorphe à $\pi_1(N)$ qui est une extension de \mathbb{Z}^m par $\pi_1(M)$.

Proposition 2.5.

Sous les hypothèses de la proposition précédente, considérons N'_m une composante connexe de $p^{-1}(N_m)$ par la projection $p : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow N$, alors N'_m n'est pas contractible.

Preuve.

Supposons que N'_m soit contractible, l'application $\pi_1(N'_m) \rightarrow \pi_1(N)$ est un isomorphisme. Ceci implique que $\pi_1(N)$ préserve \hat{N}_m qui est contractible. Les variétés N et N_m étant des espaces d'Eilenberg MacLane, on déduit que la dimension de N_m est supérieure ou égale à celle de N .

Remarque.

Le morphisme $\pi_1(N_1) \rightarrow \pi_1(N)$ est un épimorphisme strict car la dimension cohomologique de $\pi_1(N_1)$ est 2.

Proposition 2.6.

L'ensemble $p^{-1}(N_m)$ est connexe, si $m > 1$ est n'est pas algébrique.

Preuve.

L'ensemble $p^{-1}(N_m)$ est connexe car il est stable par $\pi_1(N)$. Supposons qu'il soit algébrique, ceci entraîne qu'il est stable par l'adhérence de Zariski de $\pi_1(N)$ dans le groupe des transformations affines $Aff(\mathbb{R}^{2n})$ de \mathbb{R}^{2n} qui agit transitivement sur \mathbb{R}^{2n} . On en déduit une contradiction.

Définition 2.1.

Soit N une variété différentiable, une fibration de Lefschetz définie sur N , est une application $h : N \rightarrow U$ de N dans une surface de Riemann U vérifiant les propriétés suivantes:

h est une submersion sur $N - \{n_1, \dots, n_p\}$

Sur une carte (U_i, ϕ_i) de n_i , h est une fonction de morse: il existe un voisinage (V_i, ψ_i) de $h(n_i)$ tel que

$$\psi_i \circ h \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \sum x_i^2$$

Un pinceau symplectique sur M , est défini par un recouvrement de M par des variétés symplectiques de codimension 2, telles que:

Il existe une variété de codimension 4, N , telle que l'intersection de deux variétés distinctes de la famille précédentes est N ,

L'éclatée de M le long de N est une fibration de Lefschetz

Donaldson a montré l'existence d'un pinceau symplectique sur toute variété symplectique compacte. En dimension 4 ce pinceau est une fibration de Lefschetz dont l'image est la sphère, les fibres régulières sont des surfaces difféomorphes à C_l la surface compacte de genre l , La fibre en n_i est obtenu en contractant un lacet c_i de C_l , le groupe fondamental de N est le quotient de $\pi_1(C_l)$ par le sous-groupe normal engendré par les lacets.

Proposition 2.7.

Supposons que le pinceau sur une variété symplectique quelconque M soit une fibration, alors M est difféomorphe à un produit $S^2 \times N$.

Preuve.

L'orthogonal des fibres de la fibration symplectique est intégrable. On conclut grace à un théorème de Ehresmann.

Proposition 2.8.

La restriction de la connection ∇_N définissant la structure affine de N , induit sur chaque sous-variété N_i une connection symétrique ∇_{N_i} .

Preuve.

Soient x un élément de N_i , et X_1, X_2 deux champs de vecteurs de N_i . La restriction du fibré tangent TN de N à N_i , est la somme $TN_i \oplus TN'_i$, où TN'_i désigne l'orthogonal de TN_i par la forme symplectique. Considérons un atlas affine $(U_i)_{i \in I}$ de (N, ∇_N) pour tout champs de vecteurs Y_1 et Y_2 de N , $\nabla_{N|Y_1|U_i} Y_2|U_i = dY_2|U_i(Y_1|U_i)$, $\nabla_{N_i X_1|U_i} X_2|U_i$ est la projection de $dX_2|U_i(X_1|U_i)$ sur TN_i parallèlement à TN'_i .

Remarque.

La variété N_i peut être considérée comme une fibre d'un pinceau symplectique de N_{i+1} .

Proposition 2.9.

La restriction de la forme symplectique ω_i de N à N_i , est parallèle relativement à ∇_{N_i} .

Preuve.

Supposons que ω_{i+1} soit parallèle relativement à $\nabla_{N_{i+1}}$. Considérons une sous-variété de codimension 4, L_i de N_{i+1} telle que N_i soit la feuille d'un pinceau sur N_{i+1} dont les feuilles contiennent toutes L_i . La restriction du pinceau P_i à $N_{i+1} - L_i$ est un feuilletage singulier \mathcal{F}_i . Soient X, Y, Z trois champs de vecteurs de N_i , pour tout point u de $N_i - L_i$, il existe un voisinage U de u dans $N_{i+1} - L_i$ tel que la restriction de \mathcal{F}_i à U soit simple, $U = F_0 \times T$, et les feuilles de la restriction du feuilletage à U sont $F_0 \times x$. Soient trois champs de vecteurs tangents aux feuilles X', Y' et Z' dont les restrictions respectives à $N_i - L_i$ sont X, Y, Z . On suppose que $X' = (X, 0)$, $Y' = (Y, 0)$ et $Z' = (Z, 0)$ sur U . La forme symplectique ω_{i+1} est parallèle par rapport à ∇_{i+1} ceci s'écrit:

$$X' \cdot \omega_{i+1}(Y', Z') - \omega_{i+1}(\nabla_{N_{i+1} X'} Y', Z') - \omega_{i+1}(Y', \nabla_{N_{i+1} X'} Z') = 0.$$

De l'expression des champs X', Y' et Z' tangents aux feuilles de \mathcal{F}_i , on déduit que sur $N_i - L_i \cap U$, on a:

$$X \cdot \omega_i(Y, Z) - \omega_i(\nabla_{N_i X} Y, Z) - \omega_i(Y, \nabla_{N_i X} Z) = 0.$$

Cette relation est vérifiée sur N_i .

Reconstruction des variétés affines symplectique à l'aide des surfaces.

Soit TN'_1 , l'orthogonal du fibré tangent TN_1 de N_1 pour la forme symplectique. La connexion ∇_M induit sur TN'_1 une connexion $\nabla_{N'_1}$.

Un problème important est de reconstruire les variétés affines symplectiques compactes à partir d'une surface.

Toute variété symplectique affine se construit ainsi:

On considère une surface N_1 , un fibré TN'_1 au-dessus de N_1 telle que la somme des fibrés $V = TN'_1 \oplus TN_1$ où TN_1 désigne le fibré tangent de N_1 soit plate et symplectique, et la restriction de la forme symplectique ω à TN_1 n'est pas dégénérée. On munit V d'une connexion sans courbure ∇_V . La dualité symplectique induit des connexions ∇_{N_1} , et $\nabla_{N'_1}$ sur TN_1 et TN'_1 . On suppose que la restriction de la forme symplectique sur N_1 soit parallèle par rapport à la connexion ∇_{N_1} . Considérons un voisinage U de la section nulle de TN'_1 , la connexion ∇_V est définie par une famille de formes ω_i définies sur un recouvrement L_i de N'_1 , à ce recouvrement est associé un recouvrement U_i de U par des ouverts $L_i \times D_i$, où D_i est un disque de la fibre type de TN'_1 , on définit sur U la connexion

$$\nabla_{U X} Y = dY(X) + \omega_i(X)Y$$

Cette définition a un sens car les groupes structuraux du fibré tangent de U et de V sont identiques. On suppose que la courbure et la torsion de la connexion ∇_V est nulle. Le groupe fondamental de U est $\pi_1(N_1)$, on en déduit une représentation d'holonomie

$$h : \pi_1(N_1) \longrightarrow Aff(\mathbb{R}^{2n})$$

La développante de la structure affine de U est un difféomorphisme

$$D : \hat{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

On suppose que l'image de h est l'holonomie d'une variété affine compacte (M, ∇_M) munie d'une forme symplectique parallèle. La conjecture de Markus affirme qu'une telle structure est complète.

Espace des modules des variété affines symplectiques.

Ce paragraphe est consacré à l'études des relations entre les espaces de modules des fibrés plats au-dessus des espaces de Riemann et des espaces des modules des variétés affines symplectiques.

D'après le paragraphe précédent, une variété affine symplectique compacte est définie par une surface de Riemann N_1 , un revêtement \hat{N}_1 plongé dans \mathbb{R}^{2n} , et sous-variété symplectique pour la forme symplectique parallèle ω , une représentation

$$h : \pi_1(N_1) \longrightarrow Aff(\mathbb{R}^{2n})$$

vérifiant:

- (i) la partie linéaire préserve la forme symplectique ω .
- (ii) L'image $h(\pi_1(N_1))$ préserve \hat{N}_1 et le quotient de \mathbb{R}^{2n} par $h(\pi_1(N_1))$ est une variété affine compacte.

Théorème 2.10.

Soit (N, ∇_N) une variété affine compacte dont le groupe d'holonomie linéaire est contenue dans $Gl(n, \mathbb{Z})$, le groupe fondamental de N est polycyclique.

Preuve.

On a construit une variété affine $(N', \nabla_{N'})$ qui est le quotient du fibré cotangent de N par \mathbb{Z}^n , la variété N' est munie d'une forme symplectique $\omega_{N'}$ parallèle relativement à la connexion affine. Il suffit de montrer que le groupe fondamental de N' est polycyclique.

Soit N_1 une surface de Donaldson contenue dans N' telle que l'application naturelle $\pi_1(N_1) \rightarrow \pi_1(N')$ soit surjective. Il a été montré par Weinstein que les classes de Chern d'ordre impaire pour toutes structures pseudo-complexes

sous-jacentes a un fibré symplectiques qui contient un sous-fibré lagrangien sont nulles. Il en résulte que les classes de Chern d'ordre impaires de TN' sont nulles pour toutes structures pseudo-complexes subordonnée car les fibres de la projection $N' \rightarrow N$ sont des tores lagrangiens. On en déduit que la première classe de Chern de $TN'_{|N_1}$ la restriction de TN' à N_1 est nulle. Ceci implique que $TN'_{|N_1}$ est un fibré complexe trivial.

Les fibré complexes au-dessus de N_1 sont classifiés par leurs première classe de Chern. Le fibré normal de N_1 peut être réalisé comme un fibré holomorphe. D'après le théorème d'identification des sous-variété symplectiques à fibré normal isomorphes, on peut supposer que la structure presque complexe sur un voisinage U de N_1 est intégrable.

Soient v_1, \dots, v_n une trivialisation complexe de $TN'_{|N_1}$, on peut étendre les vecteurs v_1, \dots, v_n sur un voisinage de N_1 en des champs de vecteurs complexes en suivant les géodésiques suivant l'orthogonal pour la structure symplectique du fibré tangent de N'_1 .

N_1 étant compacte, les coordonnées de $[v_i, v_j]$ dans la trivialisation complexe v_l , sont des fonctions holomorphes de N_1 d'après le théorème du prolongement analytique, elle sont donc constantes. On définit ainsi une algèbre de Lie \mathcal{H} et on note H le groupe de Lie simplement connexe correspondant.

Soit N'_1 une composante connexe de $p^{-1}(N_1)$, où $p : \hat{N} \rightarrow N'$ est la projection revêtement et \hat{N} le revêtement universel de N' , on dénote par U' une composante connexe de $p^{-1}(U)$ contenant N'_1 . Les champs v_1, \dots, v_n se relèvent sur U' en des champs holomorphes v'_1, \dots, v'_n holomorphes. Le groupe H est aussi d'algèbre de Lie engendrée par v'_1, \dots, v'_n et agit sur U' comme un pseudogroupe transitif. Soit x_0 un élément de U' , et γ un élément de $\pi_1(N)$, il existe un élément h_γ de H tel que $\gamma(x_0) = h_\gamma(x_0)$. Le voisinage U' s'identifie à un ouvert de U'' de H . Pour tout élément x de U' , il existe un élément n de U' tel que $n(x_0) = x$, $nh_\gamma(x_0) = \gamma(n(x_0))$ puisque $\pi_1(M)$ préserve \mathcal{H} , on déduit que l'action de $\pi_1(M)$ sur N'_1 coïncide avec l'action à droite d'un sous-groupe discret de H sur U' isomorphe à $\pi_1(N)$.

Considérons la décomposition d'Iwasawa de $H = CAN$, où H est compact, A abélien et N nilpotent. $C \cap \pi_1(N)$ est fini, car $\pi_1(N)$ est discret, quitte à se placer sur un revêtement fini de N tel que les valeurs propres de l'holonomie linéaire n'ont pas d'ordre fini (voir Raghunathan), on peut supposer que $C \cap \pi_1(M)$ est l'identité. Le quotient $H/C\pi_1(N)$ est une variété Eilenberg MacLane qui a le même type d'homotopie que la variété d'Eilenberg MacLane N , on déduit que $H/C\pi_1(N)$ et N ont même dimension, car N est compacte, ceci implique C est l'identité et que H est résoluble, on en déduit que $\pi_1(N)$ est résoluble.

Corollaire.

Les conjectures d'Auslander et de Markus sont vraies si l'holonomie linéaire est contenue dans $Gl(n, \mathbb{Z})$.

Genre de la surface de Donaldson.

Soit (N, ∇_N, ω_N) une variété affine compacte complète munie d'une forme symplectique ω_N , le but de cete partie est de déterminer le genre de la surface de Donaldson N_1 en fonction de la dimension $2n$ de N

Proposition.

Le genre de la surface de Donaldson N_1 de (N, ∇_N, ω_N) est supérieur à n , $\dim(N) = 2n$ si (N, ∇_N) est complète et son groupe fondamental est résoluble.

Preuve.

Sous les hypothèses du théorème, (N, ∇_N) a un revêtement fini $(N', \nabla_{N'})$ qui est le quotient d'un groupe de Lie résoluble par un réseau Γ . Le nombre minimal de générateur de Γ est $2n$, La variété de Donaldson N_1 se relève en une variété de Donaldson N'_1 de N' , comme l'application $\pi_1(N'_1) \rightarrow \pi_1(N)$ est surjective, on en déduit que le nombre de générateurs de N'_1 donc de N_1 est supérieur à $2n$, et par suite le genre de N_1 est supérieur à n .

3. Conjecture de Markus et feuilletage transversalement mesurable.

Markus a conjecturé qu'une variété affine compacte (M, ∇_M) est complète si est seulement si elle est unimodulaire. Ceci signifie que le groupe d'holonomie linéaire est un sous-groupe de $Sl(n, \mathbb{R})$.

Supposons que la variété affine compacte (L_0, ∇_{L_0}) est la feuille d'un feuilletage lagrangien \mathcal{L} défini sur la variété symplectique (M, ω) . Considérons un voisinage V de L_0 difféomorphe au quotient de $\hat{L}_0 \times T$, où T désigne une transversale lagrangienne, et la restriction de \mathcal{L} à V est le feuilletage suspension. L'action produit de $\pi_1(M)$ est défini sur \hat{L}_0 par les transformations de revêtements et sur T par l'holonomie du feuilletage. Puisque la dualité symplectique définit un isomorphisme entre l'holonomie infinitésimale de \mathcal{L} et l'holonomie linéaire de (L_0, ∇_{L_0}) , on déduit que l'holonomie de \mathcal{L} préserve une mesure de T . Ceci conduit à la conjecture suivante:

Conjecture 3.1.

Une variété affine compacte (L_0, ∇_{L_0}) est complète si et seulement si elle est la feuille d'un feuilletage lagrangien muni d'une mesure transverse dont le support contient un voisinage de L_0 .

Plante a montré que la croissance d'une feuille contenue dans le support d'une mesure transverse d'un feuilletage de codimension 1 est polynomiale. Ce résultat n'est pas vrai en codimension supérieure comme le montre certaines suspensions de S^2 .

Une variété affine compacte (L_0, ∇_{L_0}) et complète dont le groupe fondamental est polycyclique est unimodulaire. Une variété affine compacte et complète est-elle la feuille d'un feuilletage lagrangien d'une variété symplectique compacte munie d'une mesure transverse dont le support contient un voisinage saturé de L_0 , et telle que la croissance des feuilles appartenant à ce voisinage soit polynomiale?

Proposition 3.2.

Soit (M, ∇_M, ω_M) une variété affine compacte muni d'un feuilletage lagrangien \mathcal{L} ayant une feuille compacte L_0 dont le groupe fondamental est un sous-groupe normal de $\pi_1(M)$, alors M est le quotient du fibré cotangent de L_0 par un groupe de symplectomorphismes affines.

Preuve.

Le quotient de \mathbb{R}^{2n} par la restriction de l'holonomie à $\pi_1(L_0)$ est le fibré cotangent de L_0 , puisque $\pi_1(L_0)$ est normal dans $\pi_1(M)$, on déduit que (M, ∇_M) est le quotient de T^*L_0 par $\pi_1(M)/\pi_1(L_0)$.

Classification des variétés symplectiques munies d'un feuilletage lagrangiens.

Soit (M, ω, \mathcal{L}) une variété symplectique munie d'un feuilletage lagrangien \mathcal{L} , ayant une feuille compacte (L_0, ∇_{L_0}) . Supposons qu'il existe une action parallèle du cercle T^1 sur (L_0, ∇_{L_0}) pour la connexion ∇_{L_0} , Molino a étendu l'action du cercle en une action hamiltonienne à M , et construit la réduction de Marsden-Weinstein (M_1, ω_1) pour cette action. Cette dernière variété est munie d'un feuilletage lagrangien \mathcal{L}_1 qui a une feuille symplectique compacte L_1 , qui est la base d'un fibré affine d'espace total L_0 .

Supposons que la feuille L_0 est difféomorphe au tore de dimension n , T^n , sa structure affine est définie par une algèbre associative et commutative \mathcal{H} , dont l'algèbre de Lie associée est celle du groupe commutatif H . Le tore T^n est le quotient de H par un réseau. Le groupe H est aussi la composante connexe du groupe des automorphismes affines de (L_0, ∇_{L_0}) . Ceci permet d'identifier le produit associatif de \mathcal{H} à la restriction à \mathcal{H} du produit associatif de $aff(\mathbb{R}^n)$ défini par:

$$(C, c).(D, d) = (CD, C(d))$$

où C , et D désignent des éléments de $gl(n, \mathbb{R})$ et c, d des éléments de \mathbb{R}^n .

Considérons les générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ de $\pi_1(L_0)$, Il existe des éléments $(C_1, c_1), \dots, (C_n, c_n)$ de $aff(\mathbb{R}^n)$ tels que $\gamma_i = exp((C_i, c_i))$, on dira que la structure associative de \mathcal{H} est rationnelle si le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par $(C_1, c_1), \dots, (C_n, c_n)$ est stable par le produit associatif.

Proposition 3.3.

Soit (M, ∇_M) une variété affine difféomorphe au tore, supposons que l'algèbre associative qui définit sa structure affine soit rationnelle, alors il existe une action du cercle parallèle S^1 sur (M, ∇_M) .

Preuve.

Soit (C, c) un élément du \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par $(C_1, c_1), \dots, (C_n, c_n)$ tel que $(C, c).(C, c) = (C^2, C(c)) = 0$. $(C, c) = \alpha_1(C_1, c_1) + \dots + \alpha_n(C_n, c_n)$.

Puisque les α_i sont rationnels, il existe un entier p tel que $p\alpha_i$ est un entier. L'élément $\exp(p(C, c))$ appartient à $\pi_1(L_0)$, on conclut en utilisant Tsemo.

Corollaire 3.4.

Soit (M, ω) une variété symplectique munie d'un feuilletage lagrangien \mathcal{L} qui a une feuille compacte L_0 difféomorphe au tore, et dont la structure affine est complète, il existe une suite de variétés affines $(M_l, \omega_l), \dots, (M_1, \omega_1)$ telles que (M_l, ω_l) est (M, ω) , est (M_1, ω_1) est un tore, de plus (M_i, ω_i) est la réduction de Marsden-Weinstein de (M_{i+1}, ω_{i+1}) sur laquelle agit un cercle.

Preuve.

Il existe une translation t_u appartenant à $\pi_1(L_0)$ car la structure affine de L_0 est rationnelle. Cette action s'étend en une action hamiltonienne de (M, ω) . La réduction de Marsden-Weinstein de (M, ω) est la variété symplectique (M_1, ω_1) munie d'un feuilletage lagrangien ayant une feuille compacte L_1 dont la structure affine est aussi rationnelle. On peut réitérer le procédé.

Il existe des structures affines sur le tore de dimension 2 dont le groupe d'holonomie ne contient pas de translations.

Considérons le groupe de Lie de dimension deux H de $Aff(\mathbb{R}^2)$ dont les éléments sont $f_{s,t}(x, y) = (x + sy + \frac{s^2}{2} + t, y + s)$. Ce groupe agit simplement et transitivement sur \mathbb{R}^2 . Soit h un réel non rationnel. Le sous-groupe I de H engendré par $f_{h,0}$ et $f_{1,1}$ est un réseau de H . Le quotient de H par I définit une structure affine sur le tore dont l'holonomie ne contient pas de translation.

Plus généralement considérons une suite de variétés affines compactes $(L_n, \nabla_{L_n}) \rightarrow \dots \rightarrow (M_1, \nabla_{L_1})$ telle que l'application $(L_{i+1}, \nabla_{L_{i+1}}) \rightarrow (L_i, \nabla_{L_i})$ soit une fibration affine dont les fibres sont définies par une action parallèle du cercle sur $(L_{i+1}, \nabla_{L_{i+1}})$. On suppose aussi que $(L_{i+1}, \nabla_{L_{i+1}})$ est la feuille d'un feuilletage lagrangien sur une variété symplectique (M_{i+1}, ω_{i+1}) . La réduction de Marsden-Weinstein (M_i, ω_i) pour l'extension de l'action du cercle est une variété symplectique (M_i, ω_i) munie d'un feuilletage lagrangien ayant (L_i, ∇_{L_i}) comme feuille. Dans la partie suivante on classifiera les germes des feuilletages au voisinage de L_i .

Classification du voisinage d'une feuille compacte d'un feuilletage lagrangien.

Dans cette partie on rappelle la classification effectuée par Molino et Curras-Bosch qu'on généralise.

Considérons une variété affine compacte et complète (L_0, ∇_{L_0}) , x_0 un élément de L_0 , et h_{∇_0} l'holonomie de (L_0, ∇_{L_0}) , on identifie $T_{x_0}L_0$ à $T_0^*\mathbb{R}^n$ muni de sa connexion plate canonique. La partie linéaire h'_{∇_0} de l'holonomie induit une représentation $h'_{\nabla_0} : \pi_1(L_0) \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$.

Supposons aussi définie une représentation $h_{x_0} : \pi_1(L_0) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^n)$. Celle-ci est l'holonomie d'un feuilletage lagrangien qui a pour feuille compacte la variété affine (L_0, ∇_{L_0}) si et seulement si, pour tout élément de D_0 , l'ensemble des fonctions différentiables définies sur un voisinage de 0 telles que $f(0) = 0$, on a

$$(1) \quad h_{\nabla_{L_0}}(\gamma) \circ d_0 = d_0 \circ h_{x_0}(\gamma^{-1})^*,$$

où $h_{x_0}(\gamma)(f) = f \circ h_{x_0}(\gamma)$.

La représentation $h'_{\nabla_{L_0}}$ munie $T_0^*\mathbb{R}^n$ d'une action de $\pi_1(L_0)$, on notera $H^*(\pi_1(L_0), T^*\mathbb{R}^n)$ les espaces de cohomologies correspondant. L'obstruction radiante $\gamma \rightarrow h_{\nabla_{L_0}}(0)$ définit un élément $[h'_{\nabla_{L_0}}]$ de $H^1(\pi_1(L_0), T^*\mathbb{R}^n)$.

La représentation h_{x_0} muni D_0 d'une structure de module défini par

$$\gamma \circ f = f \circ h_{x_0}(\gamma^{-1})$$

L'application d_0 induit un morphisme

$$d_0^* : H^1(\pi_1(L_0), D_0) \rightarrow H^1(\pi_1(L_0), T_0^*\mathbb{R}^n)$$

On en déduit le théorème:

Théorème 3.5.

Les germes de feuilletages lagrangiens ayant (L_0, ∇_{L_0}) comme feuille compacte et pour holonomie h_{x_0} sont classifiés à symplectomorphismes près par les éléments de $d_0^{-1}([h_{\nabla_0}])$.*

Classification des germes de feuilletages lagrangiens autour d'une feuille compacte (L_0, ∇_{L_0}) dont la structure affine n'est pas forcément complète.

Dans cette partie on généralise la classification de Molino et Curras-Bosch sans supposer que la structure affine (L_0, ∇_{L_0}) soit complète. Une autre classification a été obtenue par les auteurs précédents.

On peut identifier un voisinage de L_0 dans M à un voisinage de la section nulle de T^*L_0 , et étendre l'application développement $D_0 : \hat{L}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ en une application $D : T^*\hat{L}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ telle que pour tout élément (x, y) de $T^*\hat{L}_0$, on a $D(x, y) = (D_0(x), y)$. Cette identification est possible car $T^*\hat{L}_0$ est un fibré trivial. Considérons une transversale T qu'on identifie à un ouvert contractible de la fibre de x_0 . Le feuilletage lagrangien dans U_0 est défini par une suspension. Son relevé sur $U_0 = L_0 \times T$ est le feuilletage dont les feuilles sont les sous-variétés $L_0 \times y$. Pour chaque élément x de L_0 , la dualité symplectique identifie $T^*(x \times T)$ à $T_x^*\hat{L}_0$. On peut aussi identifier $T^*(x \times T)$ à $T^*(x_0 \times T)$.

Soit U_x un voisinage de 0 dans $T_x L_0$ telle que la restriction de $\exp_{x_{\nabla_{L_0}}} = \exp_x$, l'exponentielle associée à la connexion affine à U_x soit injective. La dualité

symplectique permet d'identifier U_x à un ouvert V_x de $T^*(x \times T) = T^*(x_0 \times T)$. On définit ainsi une carte $V_x \rightarrow \hat{L}_0$. En utilisant la méthode bien connue de construction d'une développante, on obtient une application $D_0 : \hat{L}_0 \rightarrow T^*T_{x_0}$.

On a

$$(1) \quad h_{\nabla_{L_0}}(\gamma) \circ d_{x_0} = d_{x_0} \circ h_{x_0}(\gamma^{-1})^*,$$

$$\text{où } h_{x_0}^*(\gamma)(f) = f \circ h_{x_0}(\gamma).$$

Réciproquement considérons une variété affine compacte (L_0, ∇_{L_0}) et $h_{x_0} : \pi_1(L_0) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^n)$ une représentation. Définissons sur \mathbb{R}^{2n} la forme symplectique dont le relevé par la développante est la forme symplectique de $T^*\hat{L}_0$ relevée de celle de T^*L_0 par l'application revêtement. Comme au-dessus, la dualité symplectique permet d'identifier la développante de la structure affine (L_0, ∇_{L_0}) à une application $\hat{L}_0 \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$. Le fait que l'holonomie de (L_0, ∇_{L_0}) préserve le relevé de la structure symplectique $\mathbb{R}^n \times \hat{L}_0$ signifie que:

$$(1) \quad h_{\nabla_{L_0}}(\gamma) \circ d_0 = d_0 \circ h_{x_0}(\gamma^{-1})^*,$$

On en déduit une application:

$$d_0^* : H^1(\pi_1(L_0), D_0) \rightarrow H^1(\pi_1(L_0), T_0^*\mathbb{R}^n)$$

On a le théorème de classification:

Théorème.

Les germes de feuilletages lagrangiens autour de (L_0, ∇_0) dont l'holonomie du feuilletage est h_{x_0} sont classifiés à symplectomorphismes près par les éléments de $d_0^{-1}([h_{\nabla_{L_0}}])$.*

Revenons à la classification initiale, on supposera que la variété affine (L_i, ∇_{L_i}) est compacte et complète. Etant donné une classe d'isomorphisme de feuilletage e_1 autour de (L_1, ∇_{L_1}) , on classe les germes de feuilletages autour de (L_2, ∇_{L_2}) dont la réduction de Marsden-Weinstein est le germe e_1 .

Soit x_2 un élément de L_2 dont l'image par la projection $L_2 \rightarrow L_1$ est x_1 . Un germe de feuilletage autour de (L_2, ∇_{L_2}) est définie par une représentation $h_{x_2} : \pi_1(L_2) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^{n+1})$ vérifiant la relation (1). Supposons que la réduction de Marsden-Weinstein de ce germe est la variété (M_1, ω_1) munie un feuilletage lagrangien ayant pour feuille (L_1, ∇_{L_1}) et tel que le germe autour de (L_1, ∇_{L_1}) est e_1 . On a la proposition suivante:

Proposition 3.7.

Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(L_2) & \xrightarrow{h_{x_2}} & Diff(\mathbb{R}^{n+1}) \\
\downarrow p_2 & & \downarrow \\
\pi_1(L_1) & \xrightarrow{h_{x_1}} & Diff(\mathbb{R}^n)
\end{array}$$

Preuve.

Considérons l'application moment $J : U_2 \rightarrow \mathbb{R}$, on a supposé que $J^{-1}(0)$ contient L_2 . La transversale T_2 au feuilletage est diffeomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^{l_1+1} . Il suffit de remarquer qu'on peut supposer que l'application moment est une fonction coordonnée au voisinage de 0. Pour le prouver, on remarque que la fonction utilisée pour étendre l'action du cercle dans un voisinage de L_2 Voir Molino Théorème 3.2 p. 186 doit dépendre uniquement d'une seule coordonnée dans un voisinage de 0, puisque la fonction basique associée coïncide avec l'application moment dans un voisinage.

On va noter e_2 la classe d'isomorphisme de ce germe, et on va munir l'ensemble des couples (e_1, e_2) , e_1 est fixé, d'une structure de gerbe.

Considérons le site Et_{L_0} dont les objets sont les revêtements de L_0 et les morphismes, les morphismes de revêtements. A tout objet e de Et_{L_0} on associe la catégorie $symp(e, L_0)$ de germes de feuilletages lagrangiens qui ont e comme feuille, et telle que l'holonomie du feuilletage d'un objet de $symp(e, L_0)$ en un point x_e au-dessus de x_0 est donnée par la restriction de h_{x_0} à $\pi_1(e)$. Les automorphismes des objets de $symp(e, L_0)$ sont les exponentiels des champs hamiltoniens des fonctions basiques du feuilletage lagrangien. Il est facile de montrer que la correspondance $e \rightarrow symp(e, L_0)$ est une gerbe sur Et_{L_0} . Ceci signifie que les axiomes suivants sont vérifiés:

- Pour toute flèche $U \rightarrow V$ entre éléments de $symp(e, L_0)$, on a un morphisme $r_{U,V} : symp(V, L_0) \rightarrow symp(U, L_0)$ telle que $r_{U,V} \circ r_{V,W} = r_{U,W}$.
- Condition de recollement pour les objets.

Considérons une famille couvrante $(U_i)_{i \in I}$ d'un objet U de Et_{L_0} , pour chaque i , un objet x_i de $symp(U_i, L_0)$. Supposons qu'il existe une application $g_{ij} : r_{U_i \cap U_j, U_j}(x_j) \rightarrow r_{U_i \cap U_j, U_i}(x_i)$ telle que $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$, alors il existe un objet x de $symp(e, L_0)$ tel que $r_{U_i, U}(x) = x_i$.

- Condition de recollement pour les flèches.

Considérons deux objets P et Q de $symp(L_0, L_0)$ l'application $U \rightarrow Hom(r_{U, L_0}(P), r_{U, L_0}(Q))$ est un faisceau.

- Il existe une famille couvrante $(U_i)_{i \in I}$ de Et_{L_0} telle que pour tout i la catégorie $symp(U_i, L_0)$ n'est pas vide.

- Soit U un objet de Et_{L_0} , pour tous objets x et y de $symp(U, L_0)$, il existe une famille couvrante $(U_i)_{i \in I}$ de U telle que les objets $r_{U_i, U}(x)$ et $r_{U_i, U}(y)$ sont isomorphes.

Toute flèche de $symp(U, L_0)$ est inversible, et il existe un faisceau en groupes commutatifs H sur Et_{L_0} tel que pour tout objet de $symp(U, L_0)$, $Hom(x, x) = H(U)$, et cette identification commute avec les restrictions.

Remarque.

La gerbe que nous venons d'étudier est une gerbe triviale comme le montre le théorème de classification. Nous l'appellerons $\text{symp}(L_0)$. Soit u une section globale de $\text{symp}(L_0)$, L_{0u} le relevé de L_0 à u à savoir la feuille de u qui se projette sur L_0 . Considérons une transversale lagrangienne T en L_{0u} , la dualité symplectique permet d'identifier f au feuilletage vertical de $T^*T_{x_0}$. Les automorphismes de cet objet sont les automorphismes verticaux du feuilletage. C'est un groupe commutatif puisque T est lagrangien, ces éléments sont les exponentiels de champs hamiltoniens.

Le cas général.

Considérons $(L_l, \nabla_{L_l}) \rightarrow \dots \rightarrow (L_1, \nabla_{L_1})$ une suite de variétés affine complètes telles que $f_i : (L_{i+1}, \nabla_{L_{i+1}}) \rightarrow (L_i, \nabla_{L_i})$ est une fibration affine dont les feuilles sont les orbites d'une action parallèle du cercle. Le but de cette partie est de classer les suites de germes de feuilletages lagrangiens U_i telles que: $(L_{i+1}, \nabla_{L_{i+1}})$ est une feuille de U_{i+1} , est L_i est une feuille la réduction de Marsden-Weinstein de U_{i+1} .

Le germe de feuilletage lagrangien de U_i est défini par une représentation

$$\pi_1(L_i) \longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^n)$$

vérifiant la relation (1) tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(L_{i+1}) & \xrightarrow{h_{x_{i+1}}} & \text{Diff}'(\mathbb{R}^{n+1}) \\ \downarrow p_i & & \downarrow \\ \pi_1(L_i) & \xrightarrow{h_{x_i}} & \text{Diff}(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Où $\text{Diff}'(\mathbb{R}^{n+1})$ désigne les automorphismes se projetant sur \mathbb{R}^n . Si e_1 un objet de $\text{symp}(L_1)$, on associe à e_1 la gerbe $\text{symp}(e_1, L_2)$ définie sur le site Et_{L_2} , telle que pour tout objet e_2 de Et_{L_2} , les objets de la catégorie $\text{symp}(e_1, L_2)(e_2)$ sont les germes U_2 de feuilletages lagrangiens qui ont (L_2, ∇_{L_2}) comme feuille, et telle que la réduction de Marsden-Weinstein par l'action du cercle est un feuilletage lagrangien qui a L_1 comme feuille, et le germe autour de L_1 est isomorphe à e_1 .

Supposons définie la gerbe $\text{symp}(L_p, e_1, \dots, e_{p-1})$ et soit e_p un objet de cette gerbe. On va définir la gerbe $\text{symp}(L_{p+1}, e_1, \dots, e_p)$ au-dessus du site $\text{Et}_{L_{p+1}}$, dont les objets sont les germes de feuilletages lagrangiens U_{p+1} qui ont L_{p+1} comme feuille, et tels que la réduction de Marsden-Weinstein par l'action du cercle a L_p comme feuille et le germe de ce feuilletage lagrangien autour de L_p est isomorphe à e_p .

Les gerbes $\text{symp}(L_{p+1}, e_1, \dots, e_p)$ sont des gerbes triviales. Pour tout objets e_p et e'_p de $\text{symp}(L_p, e_1, \dots, e_{p-1})$ et tout morphisme $f : e_p \rightarrow e'_p$ il existe un foncteur $f^* : \text{symp}(L_{p+1}, e_1, \dots, e'_p) \rightarrow \text{symp}(L_{p+1}, e_1, \dots, e_p)$ tel qu'il existe un isomorphisme

$$c(f, g) : (fg)^* \rightarrow g^* f^*$$

satisfaisant la condition de 1-descente

$$(Id * c(f, g) \circ c(fg, h) = c(g, h) * Id \circ c(f, gh)$$

Supposons que la dimension de L_1 est l_1 , la dimension de L_i est $l_1 + i - 1$. On va noter par D_i les germes en 0 des fonctions différentiables de \mathbb{R}^{l_1+i-1} qui s'annule à l'origine. L'holonomie en x_i munie D_i d'une structure de $\pi_1(L_i)$ module en posant:

$$\gamma \circ f = f \circ h_{x_i}(\gamma^{-1})$$

La différentielle d_i en l'origine induit un isomorphisme:

$$d_i^* : H^1(\pi_1(L_i), D_i) \longrightarrow H^1(\pi_1(L_i), T_0^* \mathbb{R}^{l_1+i-1})$$

Les classes d'isomorphismes de feuilletages dont l'holonomie est h_{x_i} sont classifiées par $d_i^{*-1}([h_{\nabla_i}])$.

Etant donné une section globale e_i de $\text{symp}(L_i)$ classifiée par la classe $c_i \in H^1(\pi_1(L_i), D_i)$, on va déterminer le cocycle classifiant des sections globales de $\text{symp}(L_{i+1})$ qui donnent lieu à e_i .

La surjection $\pi_1(L_{i+1}) \rightarrow \pi_1(L_i)$ et le diagramme commutatif (1) induisent le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} H^1(\pi_1(L_{i+1}), D_{i+1}) & \longrightarrow & H^1(\pi_1(L_i), \mathbb{R}^{l_1+i}) \\ f_i \downarrow & & g_i \downarrow \\ H^1(\pi_1(L_i), D_i) & \longrightarrow & H^1(\pi_1(L_i), \mathbb{R}^{l_1+i-1}) \end{array}.$$

L'image des cocycles classifiant des éléments de $\text{symp}(L_{i+1})$ par f_i est c_i .

Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_{l_1+i-1}$ les générateur de $\pi_1(L_i)$, on supposera que si $j \leq i$, $\gamma_1, \dots, \gamma_{l_1+j-1}$ sont les générateurs de $\pi_1(L_j)$. Remarquons puisque nous avons supposé que (L_2, ∇_{L_2}) est fibré en cercle au-dessus de (L_1, ∇_{L_1}) , on peut supposer que $h_{x_2}(\gamma_{l_1+1})$ est l'identité, c'est à dire est le générateur de $\pi_1(L_2)$ qui préserve la fibre du fibré en cercle.

Soit c_1 le cocycle qui définit la classe d'isomorphisme du germe U_1 , $c_1(\gamma_1)$ est le germe d'une fonction différentiable définit sur \mathbb{R}^{l_1} . Soit γ' un élément de $\pi_1(L_2)$ au-dessus de γ_1 , $c_2(\gamma')$ est le germe d'une fonction différentiable de \mathbb{R}^{l_1+1} au-dessus de $c_1(\gamma_1)$.

Considérons $L(h_i)$, l'holonomie linéaire de la variété affine (L_i, ∇_{L_i}) , et écrivons $\mathbb{R}^{l_1+1} = \mathbb{R}^{l_1} \oplus \mathbb{R}$. Pour tout élément $\gamma \in \pi_1(L_2)$, $L(h_2(\gamma))$ dépend de $p_2(\gamma)$ et de la projection de $L(h_2(\gamma))$ sur $\mathbb{R}e_{l_1+1}$ parallèlement à \mathbb{R}^{l_1} qui est un cocycle d_2 qui est un cocycle pour l'action triviale de $\pi_1(L_2)$ sur $\mathbb{R}e_{l_1+1}$.

Nous allons supposer que les holonomies sont linéarisables dans des voisinage des feuilles L_i . Nous allons déterminer les relations entre les cocycles qui définissent les éléments de $\text{symp}(L_2, e_1)$ et le cocycle classifiant de e_1 .

Pour tout élément e_2 de $\text{symp}(e_1, L_2)$, nous allons déterminer les relations entre son cocycle classifiant et celui de e_1 .

Pour tout élément γ de $\pi_1(L_1)$, on considère une fonction $c_2(\gamma)$ de \mathbb{R}^{l_1+1} au-dessus de $c_1(\gamma)$ ceci signifie qu'il existe une fonction $f_2(\gamma)$ telle que

$$c_2(\gamma) = c_1(\gamma)(x_1, \dots, x_{l_1}) + f_2(\gamma)(x_{l_1+1})$$

et pour γ_{l_1+1} , on considère un élément $c_2(\gamma_{l_1+1})$ qui se projette sur 0, c'est à dire une fonction de x_{l_1+1} la $l_1 + 1$ -coordonnée. Le fait que c_2 soit un cocycle implique que:

$$c_2(\gamma_{l_1+1}\gamma) = c_2(\gamma_{l_1+1}) + c_2(\gamma)$$

Pour tout élément γ de $\pi_1(L_2)$,

$$c_2(\gamma\gamma') = c_2(\gamma) + \gamma c_2(\gamma') =$$

$$c_1(p_2(\gamma)) + f_2(\gamma) + p_2(\gamma)c_1(p_2(\gamma)) + f_2(\gamma') \circ d_2(\gamma)$$

Ceci implique que

$$f_2(\gamma\gamma') = f_2(\gamma) + f_2(\gamma') \circ d_2(\gamma)$$

Plus généralement, le cocycle $c_i(h)$ d'un élément de $\text{symp}(L_i)$ est déterminé par un germe de fonction différentiable $f_i(h)$ de $\mathbb{R}e_{l_1+i-1}$ tel que

$$c_i(h)(\gamma) = c_{i-1}(p_i(\gamma) + f_i(h)(\gamma))$$

qui satisfait

$$f_i(h)(\gamma\gamma') = f_i(h)(\gamma) + f_i(h)(\gamma) \circ d_i(\gamma).$$

Bibliography.

[1] Auroux, D. Techniques approximativement holomorphes et invariants de monodromie en topologie symplectiques. Thèse d'habilitation 2003.

[2] Charette, V. Goldman, W.

Affine schottky groups and Crooked tilings. Proceedings of Crystallographic groups and their generalizations II. Kortrijk 1999.

[3] Curras-Bosch, C. Molino, P.

Holonomie suspension et classification pour les feuilletages lagrangiens. C.R.A.S (326) 1317-1320

[4] Dazord, P.
Sur la geometrie des sous-fibres et des feuilletages lagrangiens. Annales scient. E. Norm. Sup. Paris.

[5] Donaldson, Symplectic submanifolds and almost-complex geometry. J. Differential Geometry (44) 1996 666-705.

[6] Donaldson, Lefschetz pencils on symplectic manifolds.
J. Differential Geom. (53) 1999 205-236

[7] Fintushel, R. Stern, R. Symplectic surfaces in a fixed homology class. J. Differential Geom. (52) 1999 203-222.

[8] Fried, D. Goldman, W.
Three-dimensional affine crystallographic groups. Advances in Math. 47 (1983), 1-49.

[9] Fried, D. Goldman, W. Hirsch, M.
Affine manifolds with nilpotent holonomy. Comment. Math. Helv. 56 (1981) 487-523.

[10] Goldman, W. Hirsch, M. The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 286 (1984), 629-949. [6] Godbillon, C.

[11] Goldman, W. Hirsch, M. Affine manifolds and orbits of Feuilletages. Etudes géométriques. Progress algebraic groups. Trans. Amer. Math. Soc. 295 (1986), 175-198. in Mathematics, 98.

[12] Goldman, W. Geometric structure on manifolds and varieties of representations. 169-198, Contemp. Math., 74

[13] Goldman, W. Private communication.

[14] Gunning, Lectures on vector bundles over surfaces.

[15] Koszul, J-L. Variétés localement plates et convexité. Osaka J. Math. (1965), 285-290.

[16] Koszul, J-L. Déformation des connexions localement plates. Ann. Inst. Fourier 18 (1968), 103-114.

[17] Liberman, P. Sur les structures presque complexes et autres structures infinitésimales régulières.

Bulletin Société Mat. France (83) 1955 195-224

[18] Margulis, G.

Complete affine locally flat manifolds with a free fundamental group. J. Soviet. Math. 134 (1987), 129-134.

[19] Milnor, J. W.

On fundamental groups of complete affinely flat manifolds, Advances in Math. 25 (1977) 178-187.

[20] Molino, P Lagrangian holonomy.

Analysis and geometry in foliated manifolds. (Santiago de Compostela) 183-194.

[21] Plante, J.F. Polycyclic groups and transversely affine foliations.

J. Diff. Geometry 35 (1992) 521-534.

[22] Plante, J. F. Foliations with measures preserves holonomy.

Ann. of Math. 102 (1975) 327-361.

[23] Plante J.F Thurston, W. Polynomial growth in holonomy foliations.

Comment. Math. Helv. 51 (1976) 567-584.

[24] Sullivan, D. Thurston, W. Manifolds with canonical coordinate charts:

some examples. Enseign. Math 29 (1983), 15-25.

[25] Tsemo, A. Dynamique des variétés affines. J. London Math. Soc. 63

(2001) 469-487.

[26] Weinstein, A. Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds.

Advances in Math 6 329-346.